

17 Вторая теорема Фредгольма. Альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода в пространстве L_2

↓ (2ая Т Фредгольма) $\exists L = E - A, A: H \rightarrow H$ - вполне непр. Тогда $\dim \ker L = \dim \ker L^* < \infty$

По лемме ядра имеют конечн. $\dim$. A -м рав-во $\dim$ -тей. От противного: $\exists \dim \ker L = n, \dim \ker L^* = m, n < m$

$\exists \{x_k\}_{k=1}^n$ - онб в $\ker L, \{y_k\}_{k=1}^m$ - онб в $\ker L^*$

$\exists$ оп-р $Tx = Lx + \sum_{k=1}^n (x, x_k) y_k$

$(Lx, y_k) = (x, L^* y_k) = 0 \Rightarrow Lx \perp y_k, k = \overline{1, m} \Rightarrow \{y_k\}$ "Лисфранжа" $\Rightarrow \|Tx\|^2 = \|Lx\|^2 + \sum_{k=1}^n |(x, x_k)|^2$

$\exists Tx = 0 \Rightarrow Lx = 0, (x, x_k) = 0, k = \overline{1, m} \Rightarrow x \in \ker L$ и $x \perp \ker L \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker T = 0$

$Tx = Ex - Ax + \sum_{k=1}^n (x, x_k) y_k = (E - B)x$, где B - вполне непр. (т.к. A - вполне непр. а $\sum_{k=1}^n (x, x_k) y_k$ - конечномерна)

По 1й Т Фред $\Rightarrow Tx = y$ разрешимо д/в прав. части

С другой стороны, $(Lx, y_{n+1}) = 0, y_{n+1} \perp \sum_{k=1}^n (x, x_k) y_k$ (т.к. $\{y_k\}$ - онб) $\Rightarrow (Tx, y_{n+1}) = 0 \Rightarrow Tx = y_{n+1}$ неразрешимо $\Rightarrow$ (?)

Аналогично приходим к (?) при $n > m$

$\Rightarrow n = m$ ■

↓ (Альтернатива Фредгольма) $\exists L \Delta = A - \Delta E, A$ - вполне непр, $\Delta \neq 0$. Тогда либо ур-е $L \Delta x = y$ разрешимо однозначно $\forall y \in H$, либо однород. ур-е $L \Delta x = 0$ имеет нетривиал. реш-е

И $L \Delta x$ имеет нетривиал. реш-е, то ур-е $L \Delta x = y$ разрешимо $\Leftrightarrow y \perp$ всем нетривиал. реш-м однород. ур-а $L^* \Delta x = 0$

Исход. лин/нез. реш-я ур-я $L \Delta x = 0$ и $L^* \Delta x = 0$ конечно и одинаково.

$\Delta L \Delta x = (A - \Delta E)x = y$

$Ax - \Delta x = y \Rightarrow \exists \Delta \neq 0, \Delta x - x = \frac{y}{\Delta} \Rightarrow \Delta x - x = \tilde{y}, \text{ где } \tilde{y} = \frac{y}{\Delta}$

$\tilde{A} = \frac{\Delta}{\Delta} = E$ - вполне непр. оп-р. Значит д/оп-ра $\tilde{A}$ справедливы все 3 Т-ы Фредг. ■

! Зам Альтернатива Фредг. справедлива д/ ИУ 2го рода в пр-ве $L_2(\Omega): y(t) = f(t) + \Delta \int_{\Omega} K(t, s) y(s) ds$

Δ - λ -ый оп-р, вполне непр. в L_2 пр-ве $H = L_2$ (предполагая от-тв ядра оп-ра $\int_{\Omega} |K(t, s)|^2 ds dt < \infty$)

$y = f + \Delta Ay$, где $Ay = \int_{\Omega} K(t, s) y(s) ds, \Delta > 0$

$\tilde{y} = \frac{y}{\Delta} = \frac{f}{\Delta} + Ay \Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{A} \tilde{y} - Ay = \tilde{A} \tilde{y} - \tilde{A} \tilde{y} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{f} = Ay - \vec{g}y = (A - \vec{g}E)y$
т.е. $(A - \vec{g}E)y = \vec{f}$, A — матрица ККР $\Rightarrow$ обратные матрицы A^{-1} и $(A - \vec{g}E)^{-1}$
сравнима альтернатива $\vec{f}$ и $\vec{g}$.